

Индуктивное построение регрессионных моделей волатильности (проверка гипотез Дэглиша-Халла-Суо)

В. В. Стрижов
Р. А. Сологуб

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики

Интеллектуализация Обработки Информации
9–14 Июня 2008, Алушта

Задача нелинейной регрессии

- 1 задана регрессионная выборка — множество пар

$$D = \{(\mathbf{x}_n, y_n)\}_{n=1}^N.$$

- 2 задано конечное множество порождающих функций

$$G = \{g(\mathbf{b}, \cdot, \cdot, \dots, \cdot) \mid g : \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

- 3 суперпозиция порождающих функций из G определяет параметрическую регрессионную модель

$$f = f(\mathbf{w}, \mathbf{x}).$$

- 4 требуется отыскать модель f , минимизирующую

$$E_D = \sum_{n=1}^N (f(\mathbf{w}, \mathbf{x}_n) - y_n)^2.$$

Построение модели волатильности опционных торгов

Опцион — контракт, дающий покупателю право покупки или продажи актива по заданной цене в заданный момент времени.

$$C_t = F(\sigma, P, B, K, t),$$

C_t — цена опциона,

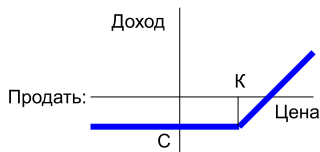
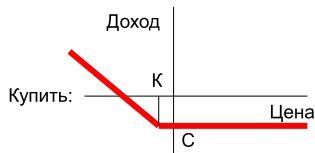
σ — волатильность,

P — цена базового актива,

B — безрисковая ставка,

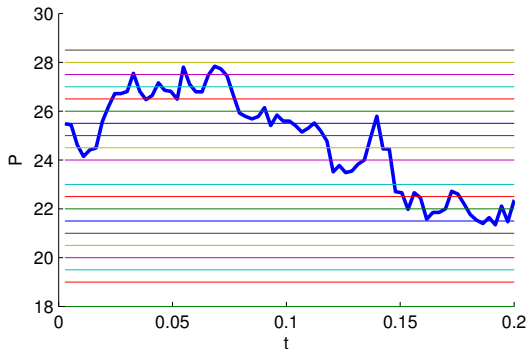
K — цена исполнения опциона,

t — время до исполнения.



$$C_t = \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{P}{K}\right) + t\left(B + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{t}}\right) - Ke^{-Bt}\mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{P}{K}\right) + t\left(B - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Историческая цена акции

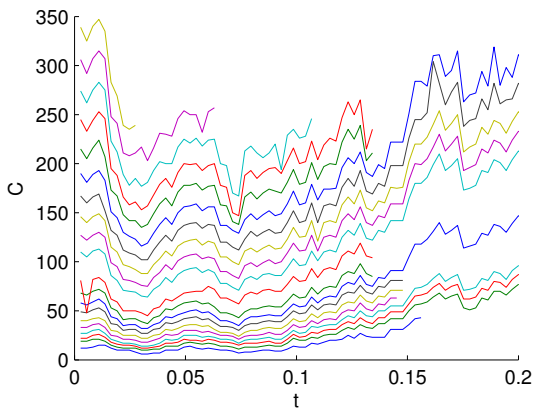


t – время до исполнения опциона в годах,

P – цена актива в указанный период.

Горизонтальные линии соответствуют различным ценам исполнения K .

Исторические цены опционов для всех значений K



t — время до исполнения опциона в годах,
 C — цена опциона в указанный период.

Вычисление волатильности опциона

Волатильность — характеристика изменчивости цены акции,

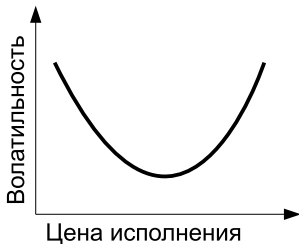
$$\sigma^{\text{imp}} = \arg \min_{\sigma} (C_{\text{hist}} - C(\sigma, P, B, K, t)).$$

Предполагаемая волатильность — зависимая переменная
искомой регрессионной модели.

(Знание волатильности позволяет определять риск
капиталовложений.)

Улыбка волатильности

Предполагаемая волатильность зависит от времени t и цены исполнения K .



Модель волатильности, предложенная экспертами

Модель для игроков рынка РТС

$$\sigma = \sigma(\mathbf{w}) = w_1 + w_2(1 - \exp(-w_3x^2)) + \frac{w_4 \arctan(w_5x)}{w_5},$$

$$\text{где } x = \frac{\log(K) - \log(C(t))}{\sqrt{t}}.$$

Модельные предположения [Дэглиш, 2006]

- Волатильность зависит только от цены опциона:

$$\frac{d\sigma}{dP} = \frac{\partial\sigma}{\partial C(P)} \frac{dC(P)}{dP}.$$

- Волатильность зависит от времени пропорционально обратному корню:

$$\sigma = \Phi\left(\frac{\ln(K/F)}{\sqrt{t}}\right).$$

Исторические данные

- В работе использовались следующие данные:
 - Полугодовой опцион Brent Crude Oil, с 02.01.2001 по 26.06.2001. Тип опциона — put, символ CLZ01.
 - Квартальный опцион CNX 100, индекс рынка Дели, с 30.09.2007 по 27.12.2007. Тип опциона — call, символ CE.
- Модель начального приближения предложена экспертами РТС

$$\sigma = \sigma(\mathbf{w}) = w_1 + w_2(1 - \exp(-w_3x^2)) + \frac{w_4 \arctan(w_5x)}{w_5},$$

$$\text{где } x = \frac{\ln K - \ln C(t)}{\sqrt{t}}.$$

Порождающие функции

Функция	Описание	Параметры
$g(\mathbf{w}, x_1, x_2)$		
plus2	$y = x_1 + x_2$	–
times2	$y = x_1 x_2$	–
frac2	$y = x_1 / x_2$	–
$g(\mathbf{w}, x)$		
inv	$y = 1/x$	–
add	$y = x + a$	a
normalpdf	$y = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}\right) + a$	λ, σ, ξ, a
linear	$y = ax + b$	a, b
parabolic	$y = ax^2 + bx + c$	a, b, c
sqrt	$y = \sqrt{x}$	–
arctan	$y = \arctan(ax)$	a

Основные шаги алгоритма

Итеративно выполняются следующие шаги:

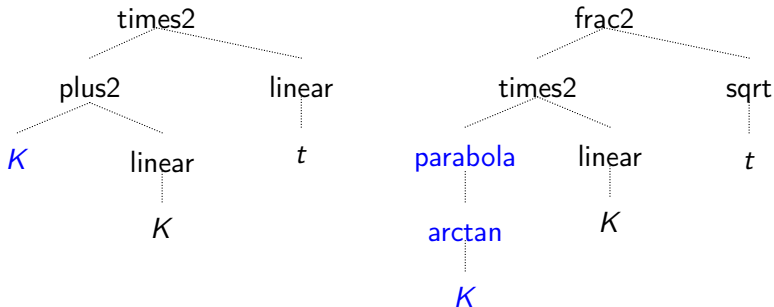
1. Каждая модель из множества моделей претендентов f_1, \dots, f_M настраивается:

$$\mathbf{w}^{\text{MP}} = \arg \min_{\mathbf{w}} E_D(\mathbf{w} | D, f_i).$$

Обмен элементами

2. Выполняется обмен элементами суперпозиций:

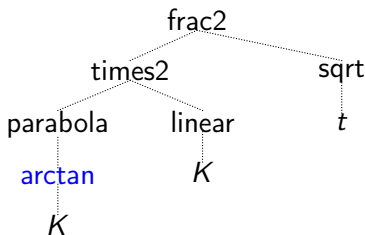
- 1 случайно выбирается пара индексов $i, j \in \{1, \dots, M\}$,
- 2 в моделях f_i и f_j выбираются элементы g_{ik} и g_{jl}
- 3 порождаются новые модели f'_i и f'_j путем обмена моделей выбранными элементами.



Модификация элемента

3. Выполняется модификация полученных моделей. В каждой из $\{f_i'\}$ с некоторой вероятностью выполняется замена элемента.

- 1 множество элементов модели f_i , случайно выбирается g_{ik} ;
- 2 из G , имеющих число аргументов, как у g_{ik} , выбирается g_s ,
- 3 g_{ik} заменяется на g_s , если число их аргументов совпадает.

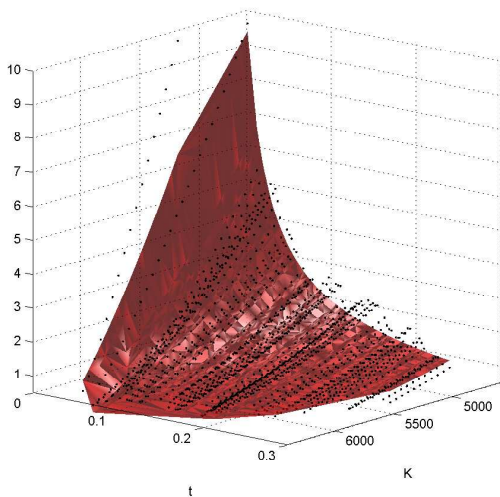
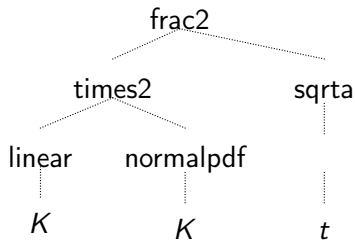


Результаты для опциона CNX 100

Проведено 5 запусков программы на исходных данных, по которым сгенерировано более 15000 моделей. Среди 200 лучших:

- Обрато корневая зависимость от времени наблюдается более чем у 160 лучших моделей.
- Зависимость от цены исполнения более чем у 140 лучших моделей арктангенсальная.

$$\sigma = \frac{(w_1 K + w_2) \mathcal{N}(K, w_3)}{\sqrt{t}}$$

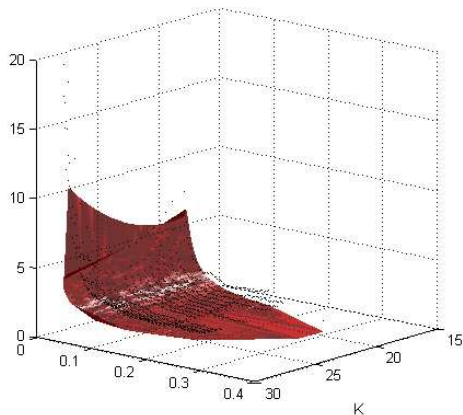
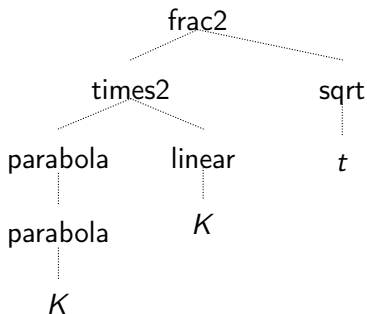


Результаты для опциона CLZ

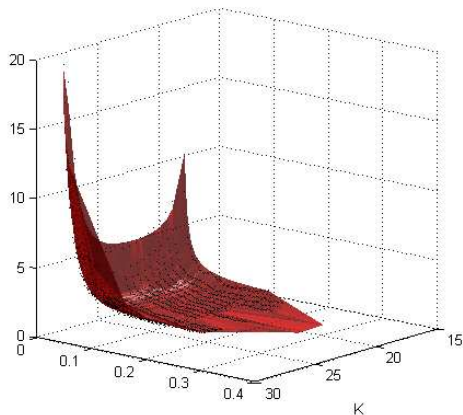
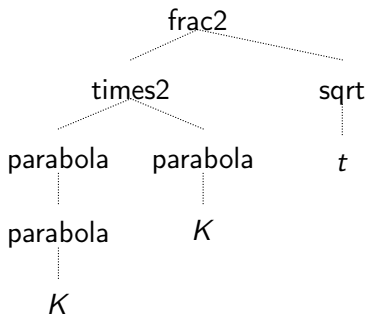
Проведено 10 запусков программы на исходных данных, по которым сгенерировано более 25000 моделей. Среди 400 лучших:

- Обрато корневая зависимость от времени наблюдается более чем у 300 лучших моделей.
- Зависимость от цены исполнения более чем у 250 лучших моделей полиномиальна.

$$\sigma = \frac{(w_1 K + w_2)(w_1 K^2 + w_2 K + w_3)}{\sqrt{\arctan t}}$$



$$\sigma = \frac{(w_1 K + w_2)(w_1 K^2 + w_2 K + w_3)^2}{\sqrt{t}}$$



Полученные результаты

- 1 Зависимость волатильности от времени обратно-корневая.
- 2 Зависимость волатильности от цены исполнения полиномиальная.
- 3 В случае, когда волатильность слабо зависит от цены исполнения, итоговая модель зависит только от времени (согласно модели Блэка-Шоулза).
- 4 Цена актива как переменная практически не встречается в лучших моделях, в случае её задания как независимой переменной.

Заключение

- 1 Разработан алгоритм порождения регрессионных моделей, интерпретируемых экспертами в контексте предметной области.
- 2 Проведен вычислительный эксперимент с использованием исторических цен опционов CNX 100 и CLZ.
- 3 Результаты эксперимента не противоречат гипотезам Дэглиша-Халла-Суо.